Chapitre 13 : Aspects énergétiques de l'étude des systèmes mécaniques

1. Le travail d'une force

1.1. Travail d'une force constante (rappel de 1e S)

Une force est dite constante si elle conserve au cours du temps d'étude : $\left\{\begin{array}{l}\text{– même direction}\\ \text{– même sens}\\ \text{– même valeur}\end{array}\right.$:

seul son point d'application peut se déplacer.

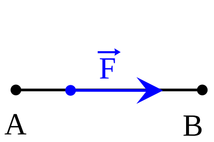
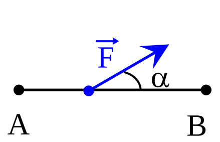
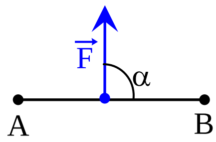
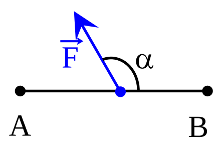
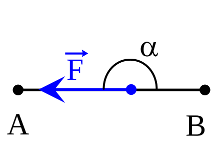
Le travail d'une force constante dont le point d'application se déplace de A en B est : $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB}$

$W_{AB}(\vec{F}) = F.AB.\cos(\alpha)$

- α : angle entre la direction de la force et du déplacement
- AB : distance séparant les points A et B (m)
- F : valeur de la force (N)
- W_{AB} : en joule (J)

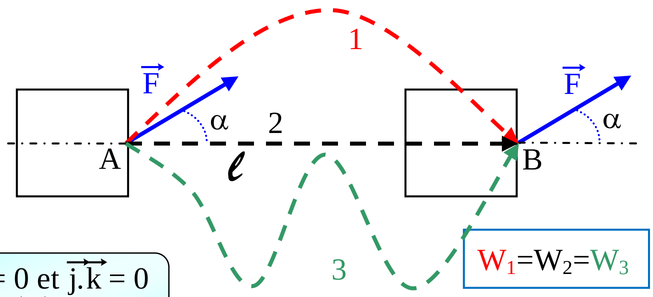
W_{AB} est une grandeur algébrique :

– Si $0 < \alpha < 90°$, $\cos(\alpha) > 0$: le travail est positif : on parle de travail **moteur**.
– Si $90° < \alpha < 180°$, $\cos(\alpha) < 0$: le travail est négatif : on parle de travail **résistant**.
– Si $\alpha = 90°$, $\cos(\alpha) = 0$: le travail est nul puisque la force est perpendiculaire au déplacement.

$\alpha = 0°$	$\alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha \leq 180°$	$\alpha = 180°$
				
$W_{AB}(\vec{F}) = +F\times AB$	$W_{AB}(\vec{F})$ est positif	$W_{AB}(\vec{F}) = 0$	$W_{AB}(\vec{F})$ est négatif	$W_{AB}(\vec{F}) = -F\times AB$
Travail moteur		travail nul	**Travail résistant**	

L'expression $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB}$ fait intervenir la force constante $\vec{F}$ et les points A et B par l'intermédiaire du vecteur $\vec{AB}$, indépendamment du chemin suivi pour aller de A à B !

Le travail **d'une force constante** ne dépend pas du chemin suivi : il ne dépend que de la distance séparant les points A et B.

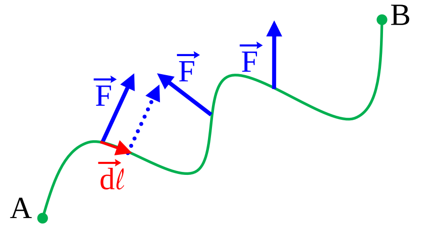


Ex : le poids est une force constante : $W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AB}$,
$\vec{AB} = (x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j} + (z_B - z_A).\vec{k}$ et $\vec{P} = -m.g.\vec{k}$.
Donc $W_{AB}(\vec{P}) = -m.g.\vec{k}.((x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j} + (z_B - z_A).\vec{k})$.
Ainsi : $W_{AB}(\vec{P}) = -m.g.(z_B - z_A)$

$\vec{i}.\vec{k} = 0$ et $\vec{j}.\vec{k} = 0$
$\vec{k}.\vec{k} = 1$

1.2. Travail élémentaire d'une force

Lorsque la force n'est pas constante, sur le déplacement AB, on peut découper le déplacement en petits éléments rectilignes (aussi petits que nécessaires) sur lesquels la force est quasiment constante. Il suffit alors de calculer la somme des travaux élémentaires. Le travail élémentaire se note δW et vaut, pour un déplacement élémentaire $\vec{d\ell}$: $\delta W = \vec{F}.\vec{d\ell}$ avec $\vec{d\ell} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$



Rem. : le travail élémentaire est noté δW et non dW car il n'est pas caractéristique de l'énergie d'un état du système, mais correspond à un ***transfert d'énergie*** entre le système et l'extérieur.

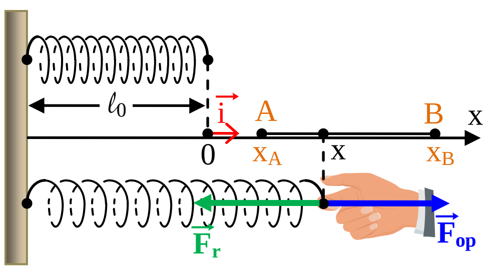
1.3. Travail d'une force extérieure appliquée à l'extrémité d'un ressort

Un opérateur exerce une force $\vec{F}_{op}$ à l'extrémité d'un ressort entre deux points d'abscisse x_A et x_B.

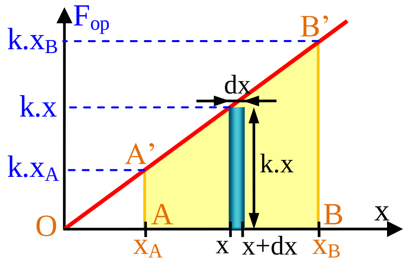
D'après la troisième loi de Newton $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_r = k.x.\vec{i}$

Le travail élémentaire pour effectuer un déplacement dx est donc : $\delta W = \vec{F}_{op}.dx.\vec{i} = k.x.dx$.

Comment déterminer le travail $W_{AB}(\vec{F}_{op})$?



1.3.1. Méthode graphique



La fonction $F_{op} = f(x) = k.x$ est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur k. Le travail élémentaire δW correspond à l'aire du rectangle de hauteur k.x et de largeur dx. Le déplacement dx est infiniment petit par conséquent l'aire du rectangle est quasiment l'aire sous la droite. Le travail W_{AB} correspond donc à l'aire sous la droite entre x_A et x_B, égale à la somme de l'aire de chaque rectangle élémentaire, compris entre x_A et x_B.

Finalement le travail $W_{AB}(\vec{F}_{op})$ correspond à l'aire du trapèze AA'B'B. On peut également remarquer que cette aire est égale à la différence des aires des triangles rectangles OBB' et OAA' :

$$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}.k.x_B.x_B - \frac{1}{2}.k.x_A.x_A \Leftrightarrow \boxed{W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}.k.x_B^2 - \frac{1}{2}.k.x_A^2}$$

1.3.2. Méthode intégrale

Le travail $W_{AB}(\vec{F}_{op})$ correspond à la somme sur le parcours AB de chaque travaux élémentaires δW.

$$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \int_A^B \delta W = \int_{x_A}^{x_B} k.x.dx = \left[\frac{1}{2}.k.x^2\right]_{x_A}^{x_B} \Leftrightarrow \boxed{W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}.k.x_B^2 - \frac{1}{2}.k.x_A^2}$$

2. L'énergie cinétique

On appelle ***énergie cinétique*** l'énergie que possède un système du fait de sa vitesse. Un solide indéformable de masse m, ***en translation*** à la vitesse v dans un référentiel donné, possède une énergie cinétique, dans ce référentiel :

$\mathbf{E_C = \frac{1}{2}.m.v^2}$	E_C : énergie cinétique (J) m : masse du système (kg) v : vitesse du centre d'inertie G ($m.s^{-1}$)

Rappel du ***théorème de l'énergie cinétique*** étudié en première S :

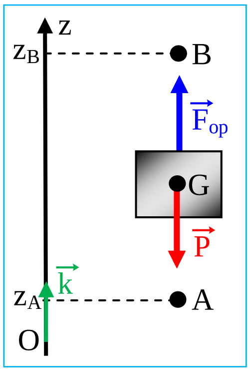
Dans un ***référentiel galiléen***, la variation d'énergie cinétique d'un système en translation de A à B est égale à la somme des travaux de chaque force extérieure $\vec{F}_i$ qui s'exercent sur lui :

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i) \text{ ou encore } \mathbf{\Delta E_C = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i)}$$

3. Les énergies potentielles

On appelle ***énergie potentielle*** l'énergie que possède un système du fait de sa position par rapport au système avec lequel il est en interaction. Elle peut être convertie en une autre forme d'énergie (par exemple énergie cinétique) par travail, transfert thermique ou rayonnement.

3.1. L'énergie potentielle de pesanteur



On souhaite amener, à vitesse constante, un objet de masse m, de l'altitude z_A à l'altitude z_B (> z_A). Au cours du déplacement, le système est soumis à deux forces : $\vec{P}$ et $\vec{F}_{op}$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}.m.v_B^2 - \frac{1}{2}.m.v_A^2 = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{F}_{op})$

Ainsi : $W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{F}_{op}) = 0$ car $v_A = v_B$ donc $W_{AB}(\vec{F}_{op}) = - W_{AB}(\vec{P})$

$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = - \vec{P}.\vec{AB} = - m.g.(-\vec{k}).(z_B - z_A).\vec{k} = m.g.(z_B - z_A) > 0$:

Le travail moteur de la force $\vec{F}_{op}$ a permis d'augmenter l'énergie que l'objet peut restituer.

$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = m.g.z_B - m.g.z_A = E_{PP}(B) - E_{PP}(A)$

L'***énergie potentielle de pesanteur*** E_{PP} d'un système matériel de masse m, dont le centre de gravité se trouve à l'altitude z, est l'énergie que possède ce système du fait de son interaction avec la Terre :

m : masse du solide (kg) g : intensité de la pesanteur ($N.kg^{-1}$)	$\mathbf{E_{PP} = m.g.z}$	z : altitude du centre de gravité du solide (m) E_{PP} : énergie potentielle de pesanteur (J)

Rem. 1 : Par convention on définit $E_{PP}(z=0) = 0$, l'axe Oz est vertical et orienté vers le haut.
Rem. 2 : Cette relation n'est valable que si le champ de pesanteur $\vec{g}$ reste localement uniforme.

3.2. L'énergie potentielle élastique

Lorsqu'un opérateur exerce une force F_{op} sur l'extrémité d'un ressort, ce dernier s'allonge. Au cours du déplacement un travail est fourni par l'opérateur. Ce travail transfert une énergie au système. Cette énergie peut éventuellement être restituée sous forme d'énergie cinétique lorsque l'opérateur cesse d'exercée une action mécanique. Le système a donc emmagasiné une énergie potentielle du fait de son élasticité suite à sa déformation.

La variation d'énergie potentielle du système, lors d'un allongement de A à B, est due au travail de la force extérieure $\vec{F}_{op}$: $E_{Pél}(B) - E_{Pél}(A) = W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2}.k.x_B^2 - \frac{1}{2}.k.x_A^2$ $\Delta E_{Pél} = W_{AB}(\vec{F}_{op}) = - W_{AB}(\vec{F}_r)$

L'***énergie potentielle d'élastique*** $E_{Pél}$ d'un système solide-ressort, de raideur k et dont l'allongement est x est :

E_{PP} : énergie potentielle élastique (J)	$\mathbf{E_{Pél} = \frac{1}{2}.k.x^2}$	k : raideur du ressort ($N.m^{-1}$) x : allongement du ressort (m)

4. L'énergie mécanique

L'***énergie mécanique*** E_m d'un système est la somme de ses énergies cinétique E_C et potentielles E_P : $E_m = E_C + E_P$

Rem. 1 : L'énergie mécanique d'un système, qui ne dissipe pas d'énergie vers l'extérieur, sous forme de forces de frottement par exemple, se conserve.

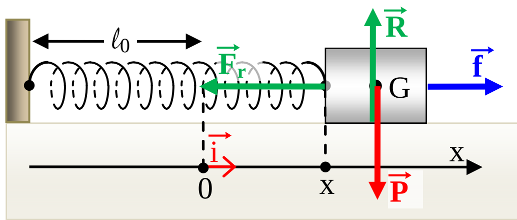
Rem. 2 : Le travail des forces de frottements engendre un transfert d'énergie du système vers l'extérieur. En présence de force de frottement, l'énergie mécanique d'un système isolé diminue : $\Delta E_m = W(\vec{f}) < 0$.

4.1. L'énergie mécanique du système solide-ressort

On considère le système solide-ressort horizontal, déjà rencontré dans le précédent chapitre.

Le poids $\vec{P}$ et la réaction normale $\vec{R}$ ne travaillent pas car ces forces sont perpendiculaires au déplacement.

La force de rappel du ressort $\vec{F}_r$ possède la même direction que le déplacement. Son travail n'est pas nul. S'il existe une force de frottement $\vec{f}$, alors son travail n'est pas nul, pour la même raison.



L'énergie mécanique du système solide-ressort est : $E_m = E_C + E_{Pél} = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.k.x^2$

Ainsi $\Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_{Pél}$.

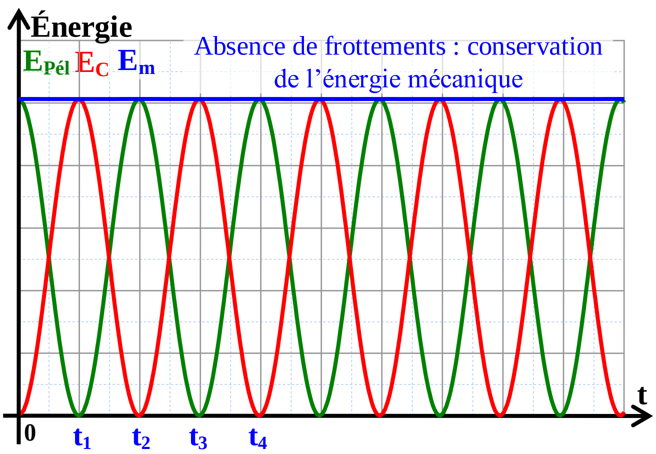
D'après le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \Sigma W(\vec{F}_{ext})$, donc $\Delta E_m = \Sigma W(\vec{F}_{ext}) + \Delta E_{Pél}$

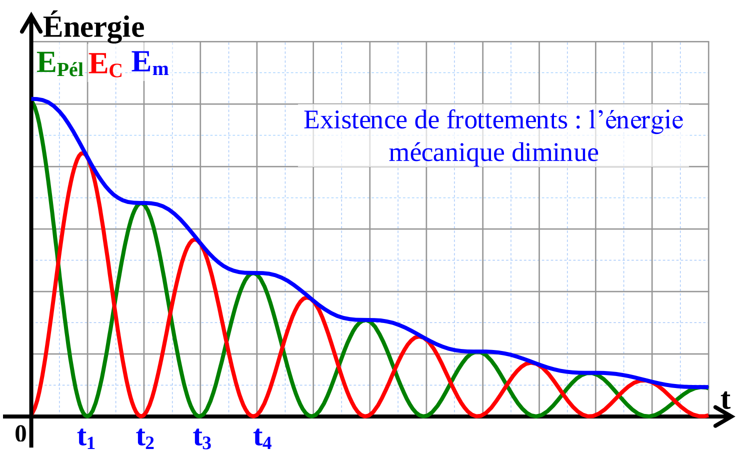
$\Delta E_m = W(\vec{F}_r) + W(\vec{f}) + \Delta E_{Pél} + W(\vec{P}) + W(\vec{R})$.

Or le travail de la force de rappel élastique $W(\vec{F}_r) = - \Delta E_{Pél}$ et $W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0$.

Par conséquent : $\boxed{\Delta E_m = W(\vec{f})}$

- En l'absence de frottement, l'énergie mécanique se conserve : $\Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_{Pél} = 0 \Leftrightarrow \Delta E_C = - \Delta E_{Pél}$: une augmentation d'énergie cinétique est due à une diminue d'énergie potentielle et inversement.
- En présence de force de frottement, l'énergie mécanique diminue car une partie de l'énergie est transférée sous forme de travail vers l'extérieur : $\Delta E_m = W(\vec{f}) < 0$.





Lorsque l'énergie potentielle est maximale ($x = \pm x_{max}$), l'énergie cinétique est nulle ($v = \frac{dx}{dt} = 0$).

Lorsque l'énergie potentielle est nulle ($x = 0$), l'énergie cinétique est maximale ($v = v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}.x_{max}$).

En effet $E_{Cmax} = E_{Pélmax}$, donc $\frac{1}{2}.m.v_{max}^2 = \frac{1}{2}.k.x_{max}^2$, donc $v_{max}^2 = \frac{k}{m}.x_{max}^2$

Dans le cas d'un régime pseudopériodique, la diminution d'énergie mécanique est plus grande lorsque l'énergie cinétique est maximale, car la valeur des frottements dépend de la vitesse du système.
Si la valeur des forces de frottements devient très importante, le régime d'oscillation peut devenir apériodique.

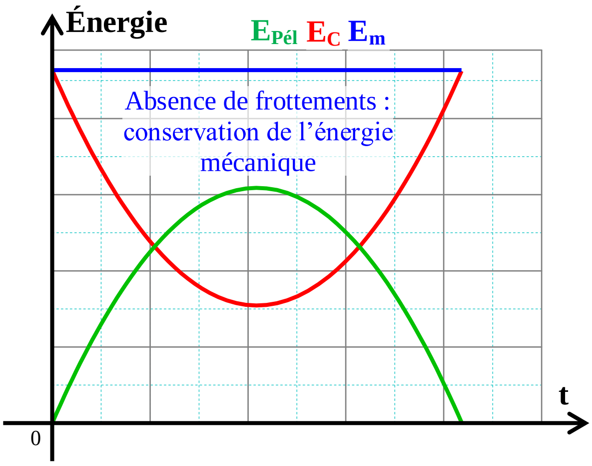
4.2. L'énergie mécanique d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

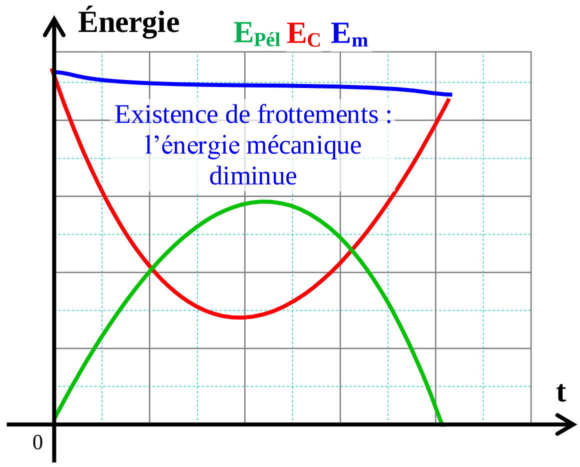
L'expression de l'énergie mécanique d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme est : $E_m = E_C + E_{PP}$
Ainsi $\Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_{PP}$.
D'après le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \Sigma W(\overrightarrow{F}_{ext})$, donc $\Delta E_m = \Sigma W(\overrightarrow{F}_{ext}) + \Delta E_{PP}$
Les forces s'exerçant sur un projectile, si l'on néglige la poussée d'Archimède sont :

- Le poids $\overrightarrow{P}$;
- Les forces de frottements fluide $\overrightarrow{f}$ si elles ne sont pas négligeables.

$\Delta E_m = W(\overrightarrow{P}) + W(\overrightarrow{f}) + \Delta E_{PP}$. Or le travail du poids $W(\overrightarrow{P}) = -\Delta E_{PP}$.

Par conséquent : $\boxed{\Delta E_m = W(\overrightarrow{f})}$





- Si les forces de frottements sont négligeables, comme dans le cas de la chute libre, l'énergie mécanique se conserve.
- Si les forces de frottements ne sont pas négligeables, le travail des forces de frottement est responsable d'une diminution d'énergie mécanique. En effet le travail des forces de frottements est négatif, puisque ces dernières sont opposées au déplacement : une partie de l'énergie mécanique du système est transférée vers l'environnement.

Rem. : Les frottements fluides augmentent lorsque la vitesse augmente. Par conséquent la diminution d'énergie mécanique est maximale lorsque l'énergie cinétique est maximale.