Chapitre 6 : Aspect énergétique des systèmes mécaniques

Objectifs :

- *Connaître l'expression du travail élémentaire d'une force ;*
- *Établir l'expression du travail d'une force extérieure appliquée à l'extrémité d'un ressort, par méthode graphique et par intégration ;*
- *Établir et connaître l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort ;*
- *Établir l'expression de l'énergie mécanique d'un système solide-ressort et d'un projectile dans un champ de pesanteur ;*
- *Exploiter la relation traduisant, lorsqu'elle est justifiée, la conservation de l'énergie mécanique d'un système ;*
- *Calculer la variation de l'énergie cinétique d'un système à partir de la variation de l'énergie potentielle et réciproquement ;*
- *Savoir exploiter un document expérimental pour calculer des énergies, reconnaître et interpréter la conservation ou la non-conservation de l'énergie mécanique d'un système.*

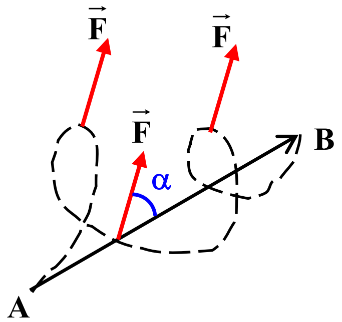
I. Quelle est l'expression du travail d'une force ?

I.1. Travail d'une force constante (Rappels de 1ère S)

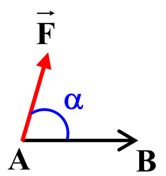
Soit une force constante $\vec{F}$ (même direction, même sens et même norme) dont le point d'application se déplace de A vers B.

Le travail de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement a pour expression :

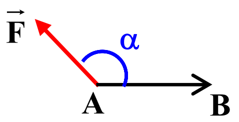
$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ $W_{AB}(\vec{F}) = F\cdot AB\cdot\cos(\alpha)$	$W_{AB}(\vec{F})$: en *J*, travail de la force constante $\vec{F}$ de A vers B F : en *N*, force constante AB : en *m*, déplacement $\alpha = \left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right)$: en ° ou ***rad***, angle entre la force $\vec{F}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$



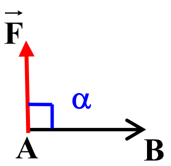
Le **travail d'une force constante** est **indépendant du chemin suivi**.
Le travail est une **grandeur algébrique** :



$\mathbf{W > 0}$ alors $\mathbf{0 < \alpha < 90°} \Rightarrow$ le travail est dit **moteur**
La force « aide » au déplacement.

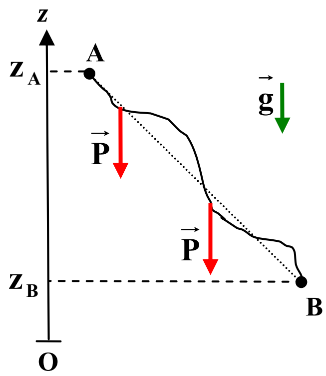


$\mathbf{W < 0}$ alors $\mathbf{90° < \alpha < 180°} \Rightarrow$ le travail est dit **résistant**
La force « s'oppose » au déplacement.



$\mathbf{W = 0}$ alors $\mathbf{\alpha = 90°} \Rightarrow$ le travail est **nul**,
la force n'a pas d'effet sur le déplacement.

I.2. Le travail du poids



Le travail du poids (force constante) d'un solide de masse **m** dont le centre d'inertie se déplace de A vers B est donné par la relation suivante :

$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} = m\cdot\vec{g}\cdot\overrightarrow{AB}$	$W_{AB}(\vec{P})$: en ***J***, travail du poids $\vec{P}$ de A vers B **P** : en ***N***, poids du solide **AB** : en ***m***, déplacement **m** : en ***kg***, masse du solide **g** : en $N\cdot kg^{-1}$ ou $m\cdot s^{-2}$, intensité de la pesanteur

Pour **un axe Oz ascendant** on a : $\overrightarrow{AB}\begin{Bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{Bmatrix}$ et $\vec{g}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix}$ donc

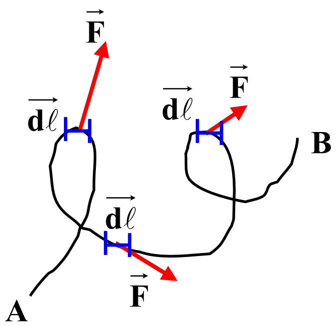
$W_{AB}(\vec{P}) = m\cdot\vec{g}\cdot\overrightarrow{AB} = m\cdot(-g)\cdot(z_B - z_A)$ d'où :

$W_{AB}(\vec{P}) = m\cdot g\cdot(z_A - z_B)$	$W_{AB}(\vec{P})$: en ***J***, travail du poids $\vec{P}$ de A vers B **m** : en ***kg***, masse du solide **g** : en $N\cdot kg^{-1}$ ou $m\cdot s^{-2}$, intensité de la pesanteur z_A **et** z_B : en ***m***, altitude du point A et du point B

Si l'axe **Oz est vertical descendant** on aura la relation suivante :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = m\cdot g\cdot(z_B - z_A)}$$

I.3. Travail d'une force non constante



Lorsque la force $\vec{F}$ n'est pas constante alors l'expression précédente (**I.1**) n'est plus valable.

On décompose alors le chemin AB en plusieurs **segments élémentaires (infinitésimaux)** $\overrightarrow{d\ell}$ (de longueur $d\ell$) sur lesquels **on considérera que la force $\vec{F}$ est constante**.

Pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathbf{d}\ell}$, la force $\vec{\mathbf{F}}$ effectue un **travail élémentaire** noté $\boldsymbol{\delta}\mathbf{W}(\vec{\mathbf{F}})$:

$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}$	$\delta W(\vec{F})$: en *J*, travail élémentaire de la force $\vec{F}$ $\overrightarrow{d\ell}$: déplacement élémentaire

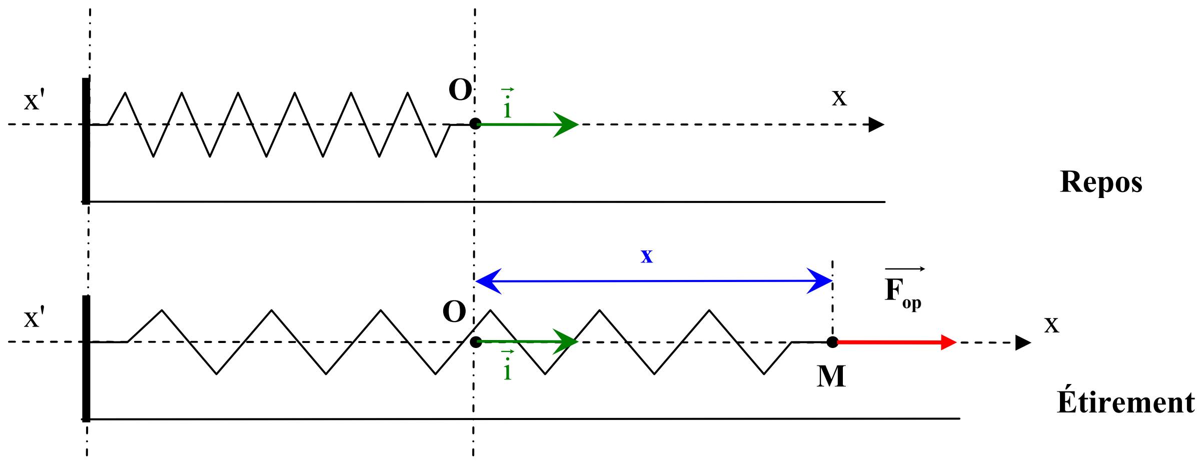
Le travail global d'une force non constante de A vers B correspond à la somme de ses travaux élémentaires :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum \delta_{d\ell} W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}$$

I.4. Travail de la force exercée par un opérateur sur un ressort

Un opérateur tire sur l'extrémité M d'un ressort dont l'autre extrémité est fixe.

La force qu'exerce l'opérateur sur le ressort est $\overrightarrow{F_{op}}$.



Le déplacement du ressort provoqué par l'opérateur est $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{x}\cdot\vec{\mathbf{i}}$ (**x** est l'allongement)

D'après la troisième loi de Newton $\overrightarrow{\mathbf{F_{op}}} = -\vec{\mathbf{F}}$ où $\vec{\mathbf{F}}$ est la force de rappel du ressort donc

$$\overrightarrow{\mathbf{F_{op}}} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\cdot\vec{\mathbf{i}}$$

La force de rappel du ressort n'est pas une force constante car elle dépend de **x** donc $\overrightarrow{\mathbf{F_{op}}}$ **n'est pas une force constante.**

➢ Expression du travail de $\overrightarrow{\mathbf{F_{op}}}$ par intégration

Pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathbf{d}\ell}$ du ressort l'expression du travail élémentaire de la force $\overrightarrow{\mathbf{F_{op}}}$ est :

$$\delta W(\overrightarrow{F_{op}}) = \overrightarrow{F_{op}}\cdot\overrightarrow{d\ell}$$

or $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = dx\cdot\vec{i}$

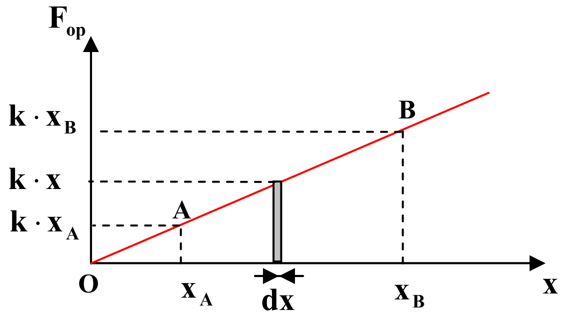
donc $\delta W(\overrightarrow{F_{op}}) = k\cdot x\cdot dx$.

L'expression du travail de la force de l'opérateur le long du chemin AB est :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \int_A^B \overrightarrow{F_{op}}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \int_A^B k\cdot x\cdot dx$$

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}\cdot k\cdot[x^2]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_B^2 - x_A^2\right)}$$

- Expression du travail de $\overrightarrow{F_{op}}$ par méthode graphique



$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \textbf{Aire sous la courbe} = \text{Aire de } OBx_B - \text{Aire de } OAx_A}$$

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{x_B \times k \cdot x_B}{2} - \frac{x_A \times k \cdot x_A}{2}$$

Ce qui donne $W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_B^2 - x_A^2)$ on retrouve le même résultat !

II. Quels sont les différents types d'énergie potentielle ?

II.1. Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique d'un ressort, notée E_{pe}, est **l'énergie qu'il emmagasine lors de sa déformation**.

La variation d'énergie potentielle d'un ressort qui parcourt le trajet AB, notée $\Delta_{AB}E_{pe}$, correspond au travail de la force exercée par un opérateur sur le ressort, soit :

$$\Delta_{AB}E_{pe} = E_{pe,B} - E_{pe,A} = W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2$$

L'énergie potentielle élastique d'un ressort pour un allongement **x** a pour expression :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + C^{ste}$$

Par convention pour $\mathbf{x = 0}$ on a $E_{pe} = 0\,J$ donc :

$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$	E_{pe} : en *J*, énergie potentielle élastique du ressort **k** : en $N \cdot m^{-1}$, constante de raideur du ressort **x**, en ***m***, allongement du ressort

II.2. Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide de masse **m**, notée E_{pp}, est **l'énergie que ce solide possède du fait de son interaction avec la Terre.**

La variation d'énergie potentielle de pesanteur du solide entre deux position A et B, notée $\Delta_{AB}E_{pp}$, correspond à l'opposé du travail du poids (travail d'un opérateur pour vaincre l'attraction terrestre lors du déplacement du solide). **Pour un Oz axe verticale ascendant :**

$$\Delta_{AB}E_{pp} = E_{pp,B} - E_{pp,A} = -W_{AB}(\vec{P}) = m \cdot g \cdot z_B - m \cdot g \cdot z_A$$

L'énergie potentielle de pesanteur en un point d'altitude **z** est : $E_{pp} = m \cdot g \cdot z + C^{ste}$

L'énergie potentielle de pesanteur dépend de l'altitude z du solide !

Pour une altitude $\mathbf{z = 0}$ on choisit $\mathbf{E_{pp} = 0\ J}$
L'expression de l'énergie potentielle dans ce cas est :

$E_{pp} = m \cdot g \cdot z$	E_{pp} : en *J*, énergie potentielle de pesanteur du solide **m** : en ***kg***, masse du solide **g** : en $N \cdot kg^{-1}$, intensité de la pesanteur **z**, en ***m***, altitude

III. Qu'est-ce que l'énergie mécanique d'un système ?

III.1. Énergie cinétique d'un système en translation – Théorème de l'énergie cinétique (T.E.C.)

L'énergie cinétique d'un solide de centre d'inertie G et de masse **m en translation est liée à sa vitesse v** et a pour expression :

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	E_c : en *J*, énergie cinétique du solide **m** : en ***kg***, masse du solide **v** : en $m{\cdot}s^{-1}$, vitesse du centre d'inertie G du solide à la date t

Théorème de l'énergie cinétique (T.E.C.) :
Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide en translation de masse **m** entre deux positions A et B ($\Delta_{AB}E_c$) est égale à la somme des travaux des forces extérieures $\sum W_{AB}(\overrightarrow{F_{ext}})$ qui s'appliquent sur ce solide en mouvement :

$$\Delta_{AB}E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = \sum W_{AB}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

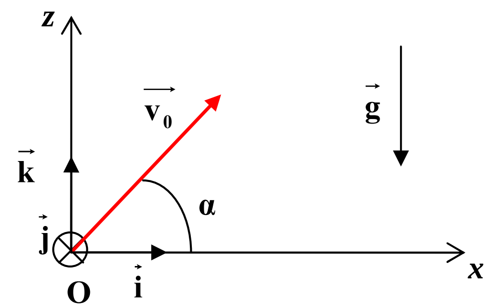
III.2. Définition de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système mécanique, notée E_m, est la **somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle** : $E_m = E_c + E_p$

III.3. Cas d'un solide en mouvement parabolique dans un champ de pesanteur uniforme

Considérons le mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.

Le projectile est soumis à son propre poids $\vec{P}$ et l'**axe Oz est vertical ascendant**.



a) Les forces de frottements $\vec{f}$ sont négligeables

D'après le T.E.C., la variation d'énergie cinétique $\Delta_{AB}E_c$ entre deux points A et B est :

$$\boxed{\Delta_{AB}E_c = W_{AB}(\vec{P})}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = m \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$

La variation d'énergie potentielle de pesanteur $\Delta_{AB}E_{pp}$ entre A et B est :

$$\boxed{\Delta_{AB}E_{pp} = m \cdot g \cdot (z_B - z_A)}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\Delta_{AB}E_c = -\Delta_{AB}E_{pp}}$$

La variation d'énergie mécanique $\Delta_{AB}E_m$ entre deux points A et B a pour expression :

$$\Delta_{AB}E_m = E_{m,B} - E_{m,A}$$

$$\Delta_{AB}E_m = E_{c,B} + E_{pp,B} - \left(E_{c,A} + E_{pp,A}\right)$$

$$\Delta_{AB}E_m = E_{c,B} - E_{c,A} + E_{pp,B} - E_{pp,A}$$

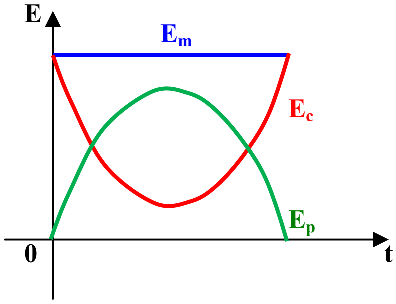
$$\Delta_{AB}E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 + m \cdot g \cdot z_B - m \cdot g \cdot z_A$$

D'où $$\boxed{\Delta_{AB}E_m = \Delta_{AB}E_c + \Delta_{AB}E_{pp} = 0}$$

L'énergie mécanique se conserve et a pour expression :

$$\mathbf{E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot z}$$

Sans frottement



À $t = 0$ s, on a $E_c(0) = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$ et $E_{pp}(0) = 0$

donc $$\mathbf{E_m(0) = E_c(0) = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2}$$

En absence de frottements on aura : $$\mathbf{E_m(t) = E_c(0) = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = C^{ste}}$$

b) Les forces de frottements $\vec{f}$ ne sont lus négligeables.

D'après le T.E.C., la variation d'énergie cinétique entre deux points A et B lors du mouvement est :

$$\mathbf{\Delta_{AB}E_c = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{f})}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = m \cdot g \cdot (z_A - z_B) + + W_{AB}(\vec{f})$$

La variation d'énergie potentielle de pesanteur $\Delta_{AB}E_{pp}$ entre A et B est : $\Delta_{AB}E_{pp} = m \cdot g \cdot (z_B - z_A)$

Donc :

$$\mathbf{\Delta_{AB}E_c = -\Delta_{AB}E_{pp} + W_{AB}(\vec{f})}$$

$$\mathbf{\Delta_{AB}E_c + \Delta_{AB}E_{pp} = W_{AB}(\vec{f})}$$

Comme $\Delta_{AB}E_m = \Delta_{AB}E_c + \Delta_{AB}E_{pp}$ alors :

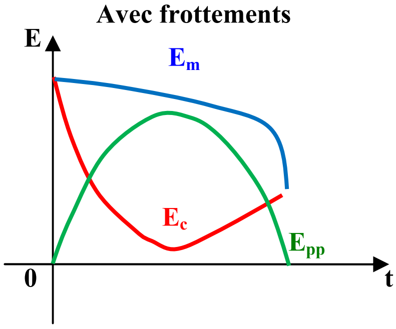
$$\boxed{\Delta_{AB}E_m = W_{AB}(\vec{f})}$$

Les forces de frottements étant opposées au mouvement donc $W_{AB}(\vec{f}) < 0$ donc :

Lorsqu'on considère les frottements, l'énergie mécanique ne se conserve pas et diminue !

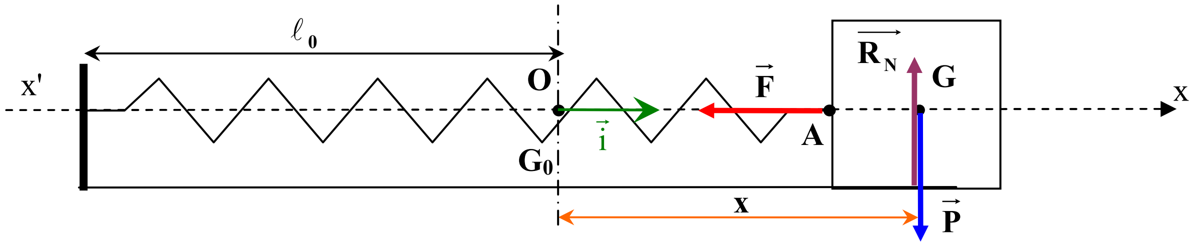
$$\mathbf{\Delta_{AB}E_m < 0}$$

Avec frottements



III.4. Cas du dispositif solide – ressort

Considérons le dispositif solide – ressort qui oscille sans frottements.
Le système est le solide, le référentiel est supposé galiléen.



Le solide reste à la même altitude tout au long du mouvement donc $E_{pp} = 0$

On raisonne de la même manière que précédemment, en appliquant le T.E.C. au système solide on a :

$$\Delta_{AB}E_c = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\overrightarrow{R_N}) + W_{AB}(\vec{F})$$

$$\boxed{\Delta_{AB}E_c = W_{AB}(\vec{F})}$$

Au point II.1. on a vu que $\vec{F} = -\overrightarrow{F_{op}}$ et $\Delta_{AB}E_{pe} = W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_B^2 - \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_A^2$ donc

$$W_{AB}(\vec{F}) = -W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}}) = \frac{1}{2}k\cdot x_A^2 - \frac{1}{2}k\cdot x_B^2 = -\Delta_{AB}E_{pe}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2 = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_A^2 - \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_B^2$$

On en déduit que :

$$\boxed{\Delta_{AB}E_c = -\Delta_{AB}E_{pe}}$$

La variation d'énergie mécanique $\Delta_{AB}E_m$ entre deux points A et B a pour expression :

$$\Delta_{AB}E_m = E_{m,B} - E_{m,A}$$

$$\Delta_{AB}E_m = E_{c,B} + E_{pe,B} - (E_{c,A} + E_{pe,A})$$

$$\Delta_{AB}E_m = E_{c,B} - E_{c,A} + E_{pe,B} - E_{pe,A}$$

$$\Delta_{AB}E_m = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2 + \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_B^2 - \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_A^2$$

D'où

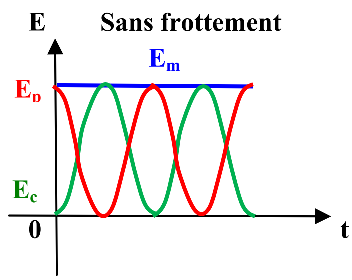
$$\boxed{\Delta_{AB}E_m = \Delta_{AB}E_c + \Delta_{AB}E_{pe} = 0}$$

L'énergie mécanique se conserve et a pour expression :

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}m\cdot v^2 + \frac{1}{2}k\cdot x^2$$

À $t = 0$ s, on a $x = x_{max}$ et $v = 0\,m\cdot s^{-1}$ d'où $E_{pe}(x_{max}) = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x_{max}^2$

Soit $E_m(0) = E_{pe}(0) = \frac{1}{2}k\cdot x_{max}^2$



En absence de frottements on aura $E_m(t) = E_{pe}(0) = \frac{1}{2}k\cdot x_{max}^2 = C^{ste}$